Aufgabe 1 Ereignisraum und Ereignisse

a)

Ereignisraum "Eine Münze wird drei Mal hintereinander geworfen": $\Omega = \{\text{Kopf, Zahl}\}^3$

Ereignis "Es wird höchstens ein Mal eine Zahl geworfen"
$A = \{(\text{Kopf,Kopf,Kopf}),(\text{Kopf,Kopf,Zahl}),(\text{Kopf,Zahl,Kopf}),(\text{Zahl,Kopf,Kopf})\}$

Wahrscheinlichkeit: $P([A]) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

b)

$A^C = \Omega \backslash A$, Ereignis "Es wird mindestens zwei mal eine Zahl geworfen"
$\Rightarrow A^C = \{(\text{Zahl,Zahl,Zahl}), (\text{Zahl,Zahl,Kopf}), (\text{Zahl,Kopf,Zahl}), (\text{Kopf,Zahl,Zahl})\}$.
$\Rightarrow P([A^C]) = \frac{|A^C|}{|\Omega|} = \frac{1}{2} = 1 - P([A])$

Aufgabe 2 Erwartungswert

a)

$M = \{0, 1\}$

$E[X] = \sum_{x \in M} \; x * P([X = x]) = 0 * \frac{1}{2} + 1 * \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

b)

$M = \{1, ..., 6\}$

$E[X] = \sum_{x \in M} \; x * P([X = x]) = 1 * \frac{1}{6} + 2 * \frac{1}{6} + ... + 6 * \frac{1}{6} = \frac{21}{6} = 3.5$

c)

Sei X die ZV des ersten Wurfes und Y die ZV des zweiten Wurfes, dann gilt:

$E[X + Y] = E[X] + E[Y] =^{b)} 3.5 + 3.5 = 7$

Aufgabe 3 O-Notation

1.) $f(n) = \mathcal{O}(g(n))$, falls $\exists\, c, n_0 > 0 \; \forall\, n \geq n_0 : f(n) \leq c \cdot g(n)$,

2.) $f(n) = \Omega(g(n))$, falls $\exists\, c, n_0 > 0 \; \forall\, n \geq n_0 : c \cdot g(n) \leq f(n)$, 3.) $f(n) = \Theta(g(n))$, falls $\exists\, c_1, c_2, n_0 > 0 \;\forall\, n \geq n_0 : c_1 \cdot g(n) \leq f(n) \leq c_2 \cdot g(n)$.

a)

Aussage

$f_1(n), f_2(n) = \mathcal{O}(g(n)) \Rightarrow f_1(n) + f_2(n) = \mathcal{O}(g(n))$ und $f_1(n) * f_2(n) = \mathcal{O}(g(n)^2)$

Beweis

- $f_1(n) + f_2(n) \leq c * g(n) + c * g(n) = 2c * g(n) =^{1.)} \mathcal{O}(g(n))$
- $f_1(n) * f_2(n) \leq c * g(n) * c * g(n) = c^2 * g(n)^2 =^{1.)} \mathcal{O}(g(n)^2)$ $\square$

b)

Aussage

$f(n) = \mathcal{O}(g(n))$ und $g(n) = \mathcal{O}(h(n)) \Rightarrow f(n) = \mathcal{O}(h(n))$

Beweis

- $f(n) = \mathcal{O}(g(n)) \Rightarrow f(n) \leq c_1 * g(n)$
  $g(n) = \mathcal{O}(h(n)) \Rightarrow g(n) \leq c_2 * h(n)$

  $\Rightarrow f(n) \leq c_1 * g(n) \leq c_1 * c_2 * h(n) =^{1.)} \mathcal{O}(h(n))$ $\square$

c)

Aussage

$f(n) = \mathcal{O}(g(n)) \Leftrightarrow g(n) = \Omega(f(n))$

Beweis

- $'' \Rightarrow ''$
  $f(n) = \mathcal{O}(g(n)) \Rightarrow f(n) \leq c * g(n) \Leftrightarrow \frac{1}{c} * f(n) \leq g(n) \Rightarrow^{2.)} g(n) = \Omega(f(n))$
- $'' \Leftarrow ''$
  $g(n) = \Omega(f(n)) \Rightarrow c * f(n) \leq g(n) \Leftrightarrow f(n) \leq \frac{1}{c} * g(n) \Rightarrow^{1.)} f(n) = \mathcal{O}(g(n))$ $\square$

Aufgabe 4 Mastertheorem

a)

$T(n) = T(\frac{9}{10}n) + n$

$log_b\ a = log_{\frac{9}{10}}\ 1 = 0,\ f(n) = n \geq n^{0+\epsilon}$ für $\epsilon < 1$ und $f(\frac{9n}{10}) \leq c * f(n) = c * n$ für $c > 1$

$\Rightarrow^{3.)}\ T(n) = O(f(n)) = O(n)$

b)

$T(n) = 9 * T(\frac{n}{3}) + n$

$log_b\ a = log_3\ 9 = 2,\ f(n) = n \leq n^{2-\epsilon}$ für $\epsilon < 1$

$\Rightarrow^{1.)}\ T(n) = O(n^{log_b\ a}) = O(n^2)$

c)

$T(n) = 2 * T(\frac{n}{2}) + 2$

$log_b\ a = log_2\ 2 = 1,\ f(n) = 2 \leq n^{2-\epsilon}$

$\Rightarrow^{1.)}\ T(n) = O(n^{log_b\ a}) = O(n)$

Aufgabe 5 Rekursionen

a)

$n = (\frac{5}{4})^k \quad k \in \mathbb{N}$

$T(1) = 0$

$T(n) = \frac{4}{5} * T(\frac{4}{5}n) + \frac{4}{5}n$

Sei $a = \frac{5}{4} \Rightarrow n = a^k$

$$
\begin{aligned}
T(a^k) &= \frac{1}{a} * T(\frac{1}{a} * a^k) + \frac{1}{a} * a^k \\
&= \frac{1}{a} * T(a^{k-1}) + a^{k-1} \\
&= \frac{1}{a} * (\frac{1}{a} * T(\frac{1}{a} * a^{k-1}) + a^{k-2}) + a^{k-1} \\
&= \frac{1}{a^2} * T(a^{k-2}) + \frac{a^{k-2}}{a} + \frac{a^{k-1}}{a^0} \\
&= \frac{1}{a^2} * (\frac{1}{a} * T(a^{k-3}) + a^{k-3}) + \frac{a^{k-2}}{a} + \frac{a^{k-1}}{a^0} \\
&= \frac{1}{a^3} * T(a^{k-3}) + \frac{a^{k-3}}{a^2} + \frac{a^{k-2}}{a} + \frac{a^{k-1}}{a^0} \\
&= \sum_{i=1}^{k} \frac{a^{k-i}}{a^{i-1}} = \sum_{i=1}^{k} a^{k-2i+1} \\
&= a^{k+1} * \sum_{i=1}^{k} a^{-2i} = a^{k+1} * \sum_{i=1}^{k} (\frac{1}{a^2})^i \\
&\overset{\text{Index-}}{\underset{\text{verschiebung}}{=}} a^{k+1} * \sum_{i=0}^{k-1} (\frac{1}{a^2})^{i+1} = a^{k-1} * \sum_{i=0}^{k-1} (\frac{1}{a^2})^i \\
&\overset{\text{Geom.}}{\underset{\text{Reihe}}{=}} a^{k-1} * \frac{(\frac{1}{a^2})^k - 1}{\frac{1}{a^2} - 1} = a^{k-1} * \frac{\frac{1-a^{2k}}{a^{2k}}}{\frac{1-a^2}{a^2}} \\
&= a^{k-1} * \frac{a^2 - a^{2k+2}}{a^{2k} - a^{2k+2}} = \frac{a^k * (a - a^{2k+1})}{a^k * (a^k - a^{k+2})} = \frac{a - a^{2k+1}}{a^k - a^{k+2}}
\end{aligned}
$$

I.A.

Sei k = 0:

$T(a^k) = T(a^0) = T(1) = \frac{a-a^{2*0+1}}{a^0-a^{0+2}} = 0$ ✓

I.V.

Angenommen die Behauptung $T(a^k) = T(n) = \frac{a-a^{2k+1}}{a^k-a^{k+2}}$ gilt für ein beliebiges, aber festes $n \in \mathbb{N}, n > n_0$

I.S.

Es gilt zu zeigen, dass: $k \rightarrow k+1$

$T(a^{k+1}) = \frac{1}{a} * T(\frac{1}{a} * a^{k+1}) + \frac{1}{a} * a^{k+1} = \frac{1}{a} * T(a^k) + a^k$

$\overset{I.V.}{=} \frac{1}{a} * \frac{a-a^{2k+1}}{a^k-a^{k+2}} + a^k$

$= \frac{1-a^{2k}}{a^k-a^{k+2}} + a^k = \frac{1-a^{2k}+a^{2k}-a^{2k+2}}{a^k-a^{k+2}} = \frac{1-a^{2k+2}}{a^k-a^{k+2}} \checkmark$ $\square$

b)

$n = 2^k, k \in \mathbb{N}$

$T(n) = A(n) + B(n),\ A(n) = A(\frac{n}{2} + B(\frac{n}{2}),\ B(n) = B(n-1) + 2n - 1$

$T(1) = 1, B(1) = 1, A(1) = 0$

Zerfall von $B(2^k)$

$$\begin{aligned} B(2^k) &= B(2^{k+1}-1) + 2^k - 2 = B(2^{k+1}-1) + 2^k - 3 + 2^k - 2 ... \\ &= \sum_{i=0}^{k} 2^{k+1} - i \end{aligned}$$

Sei $k = 0$: $B(2^k) = B(2^0) = B(1) = \sum_{i=0}^{k} 2^{0+1} - 1 = 1 \checkmark$

Zerfall von $A(2^k)$

$$\begin{aligned} A(2^k) &= A(2^{k-1}) + B(2^{k-1}) \\ &= A(2^{k-1}) + B(2^{k-1}) \\ &= A(2^{k-1}) + \sum_{i=0}^{k-1} 2^k - i \end{aligned}$$

Das ganze 2^k mal, da dann A(1) erreicht wird:

$$A(2^k) = 2^k * \sum_{i=0}^{k-1} 2^k - i$$

Sei $k = 0$: $A(2^k) = A(2^0) = A(1) = 2^0 * \sum_{i=0}^{k-1} 2^0 - 1 = 0$ ✓

Zerfall von $T(2^k)$

$$\begin{aligned}
T(2^k) &= A(2^k) + B(2^k) \\
&= 2^k * \sum_{i=0}^{k-1} 2^k - i + \sum_{i=0}^{k} 2^{k+1} - i \\
&= 2^k * k * 2^k * \sum_{i=0}^{k-1} (-i) + (k+1) * 2^{k+1} \sum_{i=0}^{k} -i \\
&= 2^{k+1} * k * \sum_{i=1}^{k} (-i-1) + 2^{k+1} * (k+1) \sum_{i=1}^{k+1} (-i-1) \\
&= -2^{k+1} * k * \sum_{i=1}^{k} (i-1) - 2^{k+1} * (k+1) \sum_{i=1}^{k+1} (i-1) \\
&= -2^{k+1} * k * \sum_{i=1}^{k} (i) - 2^{k+1} * (k+1) \sum_{i=1}^{k+1} (i) - 2k - 1 \\
&= -2^{k+1} * k * \frac{k * (k+1)}{2} - 2^{k+1} * (k+1) * \frac{(k+1) * (k+2)}{2} - 2k - 1
\end{aligned}$$

I.A.

Sei k = 0:

$T(a^k) = T(a^0) = T(1) = -1$:(

Autoren:

Fabian Ihle	fabian.ihle@student.uni-tuebingen.de	4222664
Maximilian Bertsch	maximilian.bertsch@student.uni-tuebingen.de	4175698